--

ΒΙΟΓΡΑΦΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ονοματεπώνυμο: Παρασίδης Ιωάννης του Νεστορίου

Τόπος και ημερομηνία γεννήσεως: Καζακστάν (πρώην ΕΣΣΔ), 1957

Υπηκοότης: Ελληνική

Σπουδές και Ακαδημαϊκές Θέσεις

1975-1980: Πτυχίο Μαθηματικών Πανεπιστημίου Καζακστάν

1980-1981: Εργάσθηκα με την ειδικότητα του Διδασκάλου Ανωτέρων Μαθηματικών στο Πολυτεχνικό Ινστιτούτο του Καζακστάν (Καρατάου)

1981-1983: Εργάσθηκα στην πόλη Ζανατάς , στην Πολυτεχνική Σχολή ως καθηγητής ανώτερων Μαθηματικών.

1983-1985: Εργάσθηκα στη θέση δόκιμου ερευνητή στην ίδια Πολυτεχνική Σχολή

1985-1989: Μεταπτυχιακές σπουδές στο Κρατικό Πανεπιστήμιο «Σ.Μ. Κύροφ» στην περιοχή της Μαθηματικής Ανάλυσης .

1989: Διδακτορικό με τίτλο «Μαθηματική Ανάλυση» υπό την επίβλεψη του Καθηγητή Μ.Ο. Οτελμπάεφ .

1989-1991: Εργάσθηκα στο Κρατικό Πανεπιστήμιο του Καζακστάν , στην πόλη Αλμα-Ατά

1994-1997: Εργάσθηκα στο Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας με σύμβαση 407

1998-2005: Επιστημονικός συνεργάτης στο ΤΕΙ Λάρισας

2005-2010: Αναπληρωτής Καθηγητής στο ΤΕΙ Λάρισας

Γλώσσες

Ρώσικα , Αγγλικά , Καζάκικα , Ελληνικά

Εργασίες

Καλά τοποθετημένες επεκτάσεις για ένα σύνολο τελεστών σε χώρους Banach. Ετήσια έκδοση του Ινστιτούτου

επιστημονικών ερευνών του Καζακστάν 1988, Νο 2098 σ. 31.

2. Κανονικές επεκτάσες γραμμικών τελεστών με πεπερασμένο ελάττωμα σε χώρους Banach. Δελτίο της Ακαδημίας Επιστημών της Δημοκρατίας Καζακστάν 1988, Νο 5 σ. 42-46.
3. Κανονικές αυτοσυζυγείς επεκτάσεις του ελάχιστου τελεστή, που αντιστοιχεί στον ανώτατο τελεστή με πεπερασμένο πυρήνα.

   Πρακτικό της 8ης επιστημονικής συνδιάσκεψης της Ακαδημίας Επιστημών του Καζακστάν 1988. Νο 6265, Β 88 σ.23-30.
4. Φασματικό πρόβλημα της εξίσωσης Λαβρέντιεφ σε ορθογώνιο . Πρακτικό της επιστημονικής συνδιάσκεψης του Κρατικού Πανεπιστημίου Νο 23, σ. 34.
5. Συζυγή προβλήματα για ένα σύνολο γραμμικών τελεστών σε χώρο Banach. Αγγελιοφόρος της Ακαδημίας Επιστημών της Δημοκρατίας Καζακστάν . 1991 , Ν 3 , σ. 35-42.
6. Ένα σύνολο καλά τοποθετημένων προβλημάτων μη τοπικών συνοριακών τιμών και διαφορικών εξισώσεων CAUCHY-RIEMANN με βάρους. Πρακτικό της επιστημονικής συνδιάσκεψης της Κρατικής Αρχιτεκτονικής Ακαδημίας του Καζακστάν . τ. 2. 1995. σ. 127-131.
7. Καλή τοποθέτηση ενός συνόλου προβλημάτων μη τοπικών συνοριακών τιμών. Έκδοση του Ινστιτούτου επιστημονικών ερευνών του Καζακστάν . 1996. Ν. 7059-Κα 96, σ. 18
8. Λείες επεκτάσεις ελάχιστου τελεστή στο χώρο BANACH. Έκδοση του Ινστιτούτου επιστημονικών ερευνών της Δημοκρατίας Καζακστάν . 1996. Ν. 6875-Κα 96 σ. 1-15.

--

Εισαγωγικές έννοιες της θεωρίας επεκτάσεων

Έστω οι γραμμικοί τελεστές : A_O , $\hat{A}$, A, B : $X \to Y$, όπου X,Y - οποιοιδήποτε χώροι BANACH.

Ορισμός 1: O τελεστής B λέγεται επέκταση του τελεστή A και ο τελεστής A λέγεται περιορισμός του B , εάν ισχύουν οι συνθήκες : $D(A_o) \subset D(B)$, $A_o x = Bx$ για κάθε $x \in D(A_o)$ και γράφουμε $A_o \subset B$ ή $B \supset A_o$.

Ορισμός 2 : Λέμε , ότι το πρόβλημα (B) είναι καλά τοποθετημένο από X σε Y, εάν ο αντίστοιχος τελεστής B είναι καλά τοποθετημένος , δηλαδή εάν ο τελεστής B είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος του B^{-1} υπάρχει και είναι συνεχής σε όλο Y. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι B είναι καλά τοποθετημένος τελεστής (κ.τ.τ.)

Ορισμός 3 : O κλειστός τελεστής A λέγεται ανώτατος, αν

$$\operatorname{Ker} A \neq \{0\} , \qquad R(A) = Y$$

Ορισμός 4 : O τελεστής A_O καλείται ελάχιστος ως προς ανώτατο A, αν $A_o \subset A$ και $\exists A_o^{-1}$ συνεχής σε $R(A_o) \neq Y$.

Ορισμος 5 : Λέμε , ότι ο τελεστής B είναι κανονική επέκταση του ελάχιστου τελεστή A_O , αν $A_o \subset B$, , $D(B) \subset D(A)$ και B είναι καλά τοποθετημένος τελεστής .

Παρατήρηση : O τελεστής B δεν είναι περιορισμός του A στη γενική περίπτωση .

Για να χρησιμοποιούμε τη θεωρία επεκτάσεων των τελεστών θα μας χρειαστεί ένα συγκεκριμένο καλά τοποθετημένο πρόβλημα ($\hat{A}$), ο τελεστής $\hat{A}$ του οποίου είναι

--

κανονική επέκταση του A_O και περιορισμός του Α, δηλαδή $A_O \subset \hat{A} \subset A$.

Συνήθως ένα τέτοιο καλά τοποθετημένο πρόβλημα ($\hat{A}$) υπάρχει και ο αντίστοιχος του τελεστής $\hat{A}$ είναι η βάση στο σύνολο $E_{\varkappa}(A_O, A)$ όλων των κανονικών επεκτάσεων του A_O ως προς τον ανώτατο τελεστή Α.

Στα έργα αυτά δημιουργήθηκε μια καινούργια μέθοδος της θεωρίας επεκτάσεων των γραμμικών τελεστών σε οποιουσδήποτε χώρους Banach. Την κλασσική θεωρία των συμμετρικών και αυτοσυζυγών επεκτάσεων των συμμετρικών τελεστών με μη πυκνά πεδία ορισμού δημιούργησε στην αρχή του αιώνα μας ο μεγάλος επιστήμονας Τζ. Φον. Νόϋμαν. Πιο αργά την ανέπτυξαν οι διάσημοι μαθηματικοί Κ. Φρήντριξ, Μ. Στόουν , Μ.Γ. , Κρέϋν , Μ. Κρασνοσέλσκη , Χ. Χερμάντερ, Μ. Βήσικ, Ν. Ντέζην, Β. Γορμπατσούκ και τ.λ.π. Όλοι αυτοί εργάζονταν στο χώρο Χίλμπερτ .

Οι πρώτοι επιστήμονες , που ανέπτυξαν τη θεωρία επεκτάσεων γραμμικών τελεστών σε οποιουσδήποτε χώρους Banach ήτανε ο πρώτος καθηγητής μου ο διάσημος ακαδημαϊκός της Ακαδημίας Επιστημών της Δημοκρατίας Καζαχστάν ο Μ. Οτελμπάεβ και ο δεύτερος καθηγητής μου ο διευθυντής του εργαστηρίου μαθηματικής αναλύσεως της ίδιας Ακαδημίας ο Ρ. Οϊνάροβ.

Όμως όλοι οι προηγούμενοι επιστήμονες δούλευαν μόνο με ελάχιστους τελεστές A_O με πυκνά πεδία ορισμού και περιέγραφαν μονο τις κανονικές επεκτάσεις Β, που είναι περιορισμοί του ανώτατου τελεστή Α.

--

Η καινούργα μέθοδος, που δημιουργήθηκε μέσα σ'αυτά τα έργα μας επιτρέπει όχι μόνο να περιγράψουμε όλο το σύνολο E_K (A_O, A) - κανονικών επεκτάσεων του οποιουδήποτε ελάχιστου τελεστή A_O με πεπερασμένο ελάττωμα (δηλαδή def $A_O = n < \infty$), αλλά και να αποδείξουμε σε πολλές περιπτώσεις με βάση του ανακαλυπτομένου ικανού και αναγκαίου κριτηρίου αν είναι καλά τοποθετημένο ένα σύνολο προβλημάτων συνοριακών τιμών των διαφορικών εξισώσεων. Εκτός απ' αυτό η μέθοδος αυτή μας δίνει και τη γενική λύση του προβλήματος $Bx = f$, όπου $B \in E_K (A_O, A)$, αν ξέρουμε τη λύση του προβλήματος $\hat{A}x=f$, όπου $\hat{A}$ συνήθως είναι το πρόβλημα του Κοσί ή του Ντιριχλέ. Το πρόβλημα $Bx=f$ μπορεί να περιέχει συνήθη διαφορική εξίσωση ή εξίσωση με μερικές παραγώγους ή ολοκληρωτική εξίσωση. Παρ' όλα αυτά ο τύπος της λύσης, που βρήκαμε, είναι ένας και ισχύει για όλα τα προβλήματα.

Ανάλυση εργασιών

1. Στην εργασία αυτή περιγράφεται το πλήθος $E_K (A_O, A)$ των καλά τοποθετημένων επεκτάσεων του ελάχιστου τελεστή A_O ως προς τον ανώτατο τελεστή A με πεπερασμένο πυρήνα σε χώρο Banach . Αποδεικνύεται το εξής :

   Θεώρημα 1: Για κάθε τελεστή $B \in E_K(A_O, A)$ υπάρχουν διανύσματα $q=\{q_1, \ldots\ldots q_m\}$, $g=\{g_1, \ldots\ldots, g_n\} \in Y$ και πίνακες M τύπου mxm , N τύπου mxn τέτοιοι ώστε :

--

$$\det\begin{pmatrix} G(\hat{A}^{-1}q+z(M+I_m) & G(\hat{A}^{-1}g+zN) & -I_n \\ \\ M & N & \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (1)$$

$$D(B) = \{x\in D(A) : M\Phi(x)+NG(x)=0\} \qquad (2)$$

$$Bx = Ax- q\Phi(x)-gG(x) \qquad \forall x\in D(B) \qquad (3)$$

Αντίστροφα : Ο τελεστής B με πεδίο ορισμού (2) που ορίζεται από την (3) ανήκει στον $E_K(A_O, A)$ αν ισχύει η (1).
Στο θεώρημα αυτό υποθέτουμε ότι : dim ker A=m< oo,

$D(\hat{A})=\{x\in D(A):\Phi_i(x)=0,\ i=1, ...,m\}$, $\Phi_i\in X_A^*$, $i=1,....,m$ }
$A_o\subset\hat{A}\subset A$, $\{\Phi_i\}$ γραμμικώς ανεξάρτητα στο X_A^*,
$D(A_O)= \{x\in D(\hat{A}) :G_i(x)=0 , i=1,...,n\}$, $G_i\in X_A^*$, i=1,....,n,}
$\Phi(x) = \{\Phi_1(x), \Phi_2(x),\dots, \Phi_m(x)\}$,
$G=\{G_1 ,......, G_n\}$ - στήλη - διανύσματα, $X_A=D(A)$ -χώρος Banach με νόρμα του γραφήματος

$$\|x\|_{X_A} = \|x\|_x + \|Ax\|_y$$

$\{G_i\}$ -γραμμικώς ανεξάρτητα στο X_A^*

$\hat{A}$ - είναι μία ορισμένη καλά τοποθετημένη επέκταση του A_O,

$$I_n = \begin{pmatrix} 10.....0 \\ 01.....0 \\ .... \\ 00.....1 \end{pmatrix} \text{- nxn}$$ πίνακας

2) Στο άρθρο αυτό περιγράφεται το πλήθος $E_K(A_O, A)$ στην περίπτωση που ο ελάχιστος τελεστής A_O έχει πεπερασμένο

Έστω $D(\hat{A}) = \{X \in D(A) : \Gamma X = 0\}, \Gamma : X_A \xrightarrow{\text{επί}} Z = R(\Gamma)$, $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma$, όπου Z είναι χώρος συνοριακών τιμών τύπου Banach, $\tilde{\Gamma} : \operatorname{Ker} A \to Z$ και $\tilde{\Gamma}$ είναι καλά τοποθετημένος τελεστής.

Θεώρημα 2 : Για κάθε τελεστή $B \in E_K(A_O, \hat{A})$ υπάρχει αριθμός k, $0 \leq k \leq n$, τα διανύσματα $q = \{q_1, \ldots, q_k\}$, $g = \{g_1, \ldots g_n\}$, q_i, $g_j \in Y$, $w = \{w_1, \ldots, w_k\}$, $v = \{v_1, \ldots, v_n\}$, w_i, $v_j \in Z$, και στήλη - διάνυσμα $S = \{S_1, \ldots, S_k\}$, $S_i \in Z^*$ τέτοια ώστε

$$\det \begin{pmatrix} G(\hat{A}^{-1} q + \tilde{\Gamma}^{-1} w) & G(\hat{A}^{-1} g + \tilde{\Gamma}^{-1} v) - I_n \\ S(w) - I_k & S(v) \end{pmatrix} \neq 0 \qquad (4)$$

$$D(B) = \{x : x \in D(A), \quad \Gamma x = wS(\Gamma x) + vG(x)\} \qquad (5)$$

$$Bx = Ax - qS(\Gamma x) - gG(x), \quad x \in D(B) \qquad (6)$$

Αντίστροφα για κάθε πεπερασμένο αριθμό $k \geq 0$ και για τα διανύσματα q,g,w,v,s, τα οποία ικανοποιούν την συνθήκη (4), ο τελεστής B με πεδίο ορισμού (5) που δίνεται από την (6) ανήκει στον $E_k(A_O, A)$.

3) Στην εργασία αυτή συνεχίζεται η θεωρία των επιστημόνων Τζ. Φον. Νόϋμαν, Κ. Φρήντριξ, Μ. Στόουν, Μ.Γ. Κρέϋν, Λ. Χερμάντερ.

--

Μελετούνται οι αυτοσυζυγείς επεκτάσεις , οι οποίες δεν είναι περιορισμοί του ανώτατου τελεστή.

Παράδειγμα : $B: L_2(0,1) \to L_2(0,1)$

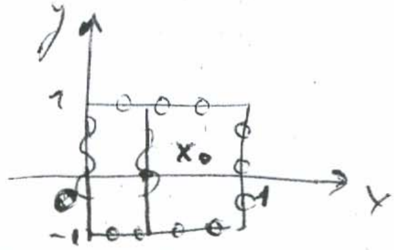
$B\chi = i\chi' - \alpha \int_0^1 x(t)dt = f(t)$

$\chi(0) = -\chi(1)$

είναι αυτοσυζυγές πρόβλημα αν το α- είναι πραγματικός αριθμός .

Τέτοιες αυτοσυζυγείς επεκτάσεις του ελάχιστου συμμετρικού τελεστή , στον οποίο αντιστοιχεί ανώτατος τελεστής με πεπερασμένο πυρήνα, περιγράφονται σε πιο γενική μορφή και μελετούνται για πρώτη φορά .

4) Θεωρείται το φασματικό πρόβλημα της εξίσωσης Λαβρέντιεφ σε ορθογώνιο :



$z_{xx} + \mathrm{sgn}y \, . \, z_{yy} = \lambda z(x,y)$

$z(x,1) = 0, \; z(0,y) = z(x_0, y), \quad 0 < x_0 < 1$

$z(x,-1) = 0 \, , \; z(1,y) = 0$

$z(x,y) \in C(\overline{\Pi}) \cap C^{2,1}(\Pi) \cap C^{2,2}(\Pi^+) \cap C^{2,2}(\Pi^-)$, $\Pi = \{(x,y): 0 < x < 1, \; -1 < y < 1\}$

Αποδεικνύεται ότι το σύστημα των ιδιοδιανυσμάτων αυτού του προβλήματος είναι πλήρες στο $L_2(\Pi)$.

5) Για ένα σύνολο καλά τοποθετημένων προβλημάτων περιγράφονται συζυγή προβλήματα. Πρώτα βρίσκονται καλά τοποθετημένα προβλήματα με πυκνά πεδία ορισμού με ικανό και αναγκαίο κριτήριο. Μετά περιγράφονται τα πεδία ορισμού και οι νόμοι λειτουργίας των συζυγών προβλημάτων.

--

Σαν παραδείγμα, μελετάται το πρόβλημα :

$Bx=x^{(n)}=f,\quad D(B)=\{x\in W^{n}_{p}(0,1): x^{(i-1)}(0) = \sum_{j=1}^{n} \psi_{j}^{(i-1)}(0)F_j(f)$,
i=1,......, n}

όπου $f\in W_p(0,1)$,

$F_j(f) = \int_0^1 f(t)F_j(t)dt,\ F_j \in W^n_{p'}(0,1),\ F_j(1)=0,\ j=1,\ldots,n,\ p'= \dfrac{p}{p-1}$,

$\Psi_i(t)= \dfrac{t^{i-1}}{(i-1)!},\ i=1, \ldots,n.$

Τότε $B^* u=(-1)^n u^{(n)}(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (-1)^i \bar{b}_{ij}\, u^{(n-i)}(0)F_j^{(n)}(t)$

$D(B^*) =\{u\in W^n_{p'}(0,1): u^{(i-1)}(1)=0,\ i=1,\ldots,n\}$

Όπου: $\|\beta_{ij}\|^{n}_{i,j=1} = W_n^{-1},\ W_n = \|\delta_{ij} + \dfrac{(-1)^n}{(i-1)!}\int_0^1 t^{i-1} F_j^{(n)}(t)dt\|^{n}_{i,j=1}$

6) Στο έργο αυτό βάση του θεωρήματος 2 μελετάται η καλή τοποθέτηση ενός προβλήματος μη τοπικών συνοριακών τιμών της εξίσωσης Κοσί-Ρίμαν.

Έστω $\Omega=\{z\in C:|z|<1\},\ z=x+iy,\ t,\ \tau\in\gamma= \partial\Omega,\ z_0\in\Omega\}$

Πρόβλημα : Για ποιούς συντελεστές $g(z)\in C_\alpha(\Omega)$, ο τελεστής $B:C_\alpha(\Omega) \to C_\alpha(\Omega)$, που αντιστοιχεί στο πρόβλημα $\partial_{\bar z} u(z) - g(z)\, u(z_0) = f(z)$ (7)

$\operatorname{Re} u(z)|_\gamma =0$, $\displaystyle\int_\gamma \frac{u(t)}{t}dt =0$

όπου $z_0 \in\Omega$, είναι καλά τοποθετημένος στο $C_\alpha(\Omega)$ - χώρο Hölder , (Χέλντερ)

--

Αποδεικνύεται το εξής

Θεώρημα : Το πρόβλημα (7) είναι καλά τοποθετημένο στο $C_\alpha(\Omega)$, αν και μόνο αν $\overline{\text{ισχύει}}$

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\,d\xi\,d\eta+\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(Tg)(t)\,dt}{t-z_0}\neq-1$$

7) Εδώ συνεχίζονται οι έρευνες της εργασίας (6) και μελετούνται διάφορα προβλήματα συνοριακών τιμών με το διαφορικό τελεστή CAUCHY-RIEMANN με βάρος. Αναφέρουμε ένα απ' αυτά τα προβλήματα.

Για ποιες συναρτήσεις $q(z)$, $g(z)\in C_\alpha(\Omega)$, $W(t)$, $V(t)\in C_{\alpha Re}(\gamma)$ και σταθερές β,δ, το πρόβλημα

$$\begin{aligned}
&\partial_{\bar z}u(z)-q(z)\int_{\gamma}\operatorname{Re}u(t)|dt|-g(z)\operatorname{Re}u(z_0)=f(z)\\
&\operatorname{Re}u(z)\big|_{\gamma}=w(t)\int_{\gamma}\operatorname{Re}u(t)|dt|+v(t)\operatorname{Re}u(z_0)\qquad\qquad(8)\\
&\int_{\gamma}\frac{\operatorname{Im}u(\tau)}{\tau}\,d\tau=\beta\int_{\gamma}\operatorname{Re}u(\tau)|d\tau|+\delta\operatorname{Re}u(z_0)
\end{aligned}$$

είναι καλά τοποθετημένο στο χώρο Χέλντερ $C_\alpha(\Omega)$. Αποδεικνύεται

Θεώρημα : Το πρόβλημα (8) είναι καλά τοποθετημένο σε $C_\alpha(\Omega)$, αν και μόνο αν ισχύει

$$t\begin{pmatrix}\operatorname{Re}(Tq+Hq)(z_0)+\operatorname{Re}(Lw)(z_0) & \operatorname{Re}(Tg+Hg)(z_0)+\operatorname{Re}(LV)(z_0)-1\\ \displaystyle\int_{\gamma}W(\tau)\,|dt|\;-1 & \displaystyle\int_{\gamma}V(\tau)\,|dt|\end{pmatrix}$$

--

όπου

$$(Tq)(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega}\frac{g(\zeta)}{\zeta - z}\,d\xi\, d\eta, \qquad (Hq)(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(Tq)(t)}{t-z}\,dt \quad ,$$

$$(L\ w)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{t+z}{t(t-z)}w(t)\,dt - \frac{C_w - \beta}{2\pi} \quad ,$$

$$C_w = \int_{\gamma}\frac{1}{t}\,\mathrm{Im}\Big(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\tau + t}{\tau(\tau - t)}w(\tau)\,d\tau\Big)dt, \qquad \zeta = \xi + i\eta$$

8) Σ' αυτήν την εργασία περιγράφεται όλο το σύνολο R_g (A_O, A) - των λείων επεκτάσεων του ελάχιστου τελεστή A_O, που γενικά έχει άπειρο ελάττωμα (def $A_O = \infty$). Εδώ δημιουργήθηκε μια καινούργια μέθοδος, εντελώς διαφορετική από την περίπτωση πεπερασμένου ελαττώματος (def $A_O = n < \infty$). Η θεωρία αυτή μας επιτρέπει να περιγράψουμε πεδία ορισμού και νόμους λειτουργίας νέων λείων επεκτάσεων , που είναι μαθηματικά μοντέλα κάποιων φυσικών προβλημάτων , για οποιονδήποτε ελάχιστο τελεστή A_O.

Γιὰ κάθε λεία επέκταση $\hat{A} \in R_g(A_O, A)$ δίνεται η γενική μορφή της λύσης του αντίστοιχου προβλήματος $\hat{A}x = f$

Έστω A_O , A είναι ελάχιστος και ανώτατος τελεστές αντίστοιχα από X σε F , όπου $A_O \subset A$ και X, F - χώροι BANACH.

--

Ορισμός . Στην περίπτωση , που ο ανώτατος τελεστής A - είναι διαφορικός , τις κανονικές επεκτάσεις του ελάχιστου τελεστή A_O - θα ονομάσουμε λείες επεκτάσεις

Έστω A_ϕ - μια γνωστή λεία επέκταση του A_O και $A_O \subset A_\phi \subset A$, $D(A_\phi) = D(A_O) \dot{+} S$, όπου S - είναι ένας υπόχωρος του χώρου BANACH $X_A = D(A)$ με νόρμα γραφήματος $\|X\|_{X_A} = \|X\|_X + \|Ax\|_F$.

Έστω $\Gamma_1 : X_A \xrightarrow{\text{Επί}} Z_1$, $\Gamma_2 : X_A \xrightarrow{\text{Επί}} Z_2$, όπου Z_1, Z_2 - χώροι BANACH, Γ_1, Γ_2 - είναι συνεχείς τελεστές τέτοιες, ώστε
$\operatorname{Ker} \Gamma_1 = D(A_O) \dot{+} \operatorname{Ker} A$, $\operatorname{Ker} \Gamma_2 = D(A_\phi)$
και έστω P_K- είναι προβολή του X_A επί του S. Τότε υπάρχει συνεχής τελεστής C από Z_2 σε Ker A τέτοιος, ώστε $P_K = C\Gamma_2$, $\Gamma_2 = C^{-1} P_K$.

Με M_4 συμβολίζουμε το σύνολο των τελεστών B, T, Π_1, Π_2 που ικανοποιούν τις συνθήκες :

1. B είναι συνεχής τελεστής από Z_1 σε Z_2
2. T είναι συνεχής τελεστής από Z_1 σε F
3. Π_1, Π_2 - γενικά είναι μη φραγμένοι τελεστές με πεδία ορισμού $D(\Pi_1) \supseteq R(E_1 - \Gamma_1 A_\phi^{-1} T)$, $D(\Pi_2) \supseteq R(B)$
   και με πεδία τιμών $R(\Pi_1) \supseteq R(E_1 - \Pi_2 B)$, $R(\Pi_2) \subset Z_1$, $\ker \Pi_1 = \{0\}$.
4. Ο τελεστής $\Phi = \Gamma_1 A_\phi^{-1} T + \Pi_1^{-1} (E_1 - \Pi_2 B)$ έχει αντίστροφο που είναι συνεχής σε Z_1 , όπου E_1 είναι μοναδιαίος τελεστής στο Z_1.

--

Θεώρημα : Για κάθε $\hat{A} \in R_g(A_O, A)$ υπάρχει ένα σύνολο τελεστών $(B, T, \Pi_1, \Pi_2) \in M_4$ και ισχύουν

$$\hat{A}x = Ax + T\Pi_1\Gamma_1 x + T\Pi_2\Gamma_2 x \qquad (9)$$

$$x \in D(\hat{A}) = \{x \in X_A : \Gamma_1 x \in D(\Pi_1),\ \Gamma_2 x \in D(\Pi_2),\ \Gamma_2 x = B\Pi_1\Gamma_1 x + B\Pi_2\Gamma_2 x\} \qquad (10)$$

Και αντίστροφα , για κάθε σύνολο $(B, T, \Pi_1, \Pi_2) \in M_4$ ο τελεστής $\hat{A}$, που ορίζεται από την (9) με πεδίο ορισμού (10), είναι λεία επέκταση του τελεστή A_O.

Η λύση του προβλήματος (9), (10) δίνεται από τον τύπο $\hat{A}^{-1} f = A_\phi^{-1} f + (CB - A_\phi^{-1} T)\, \Gamma_1 A_\phi^{-1} f,\ \forall f \in F$

Θεώρημα : Έστω ο τελεστής A_ϕ^{-1} είναι συμπαγής . Τότε ο αντίστροφος τελεστής $\hat{A}^{-1}$ της λείας επέκτασης $\hat{A}$ του τελεστή A_O είναι συμπαγής τελεστής , αν και μόνο αν είναι συμπαγής ο τελεστής B.